CAMPOS ELECTROMAGNÉTICOS

Temas 4 y 5

Ondas y Polarización

P1.- Una onda plana uniforme con $\tilde{E} = E_x \hat{u}_x$ se propaga en un medio simple sin pérdidas ($\varepsilon_r = 4,\ \mu_r = 1,\ \sigma = 0$) en la dirección $+z$. Suponer que E_x es senoidal con frecuencia 100 MHz y que su valor máximo es 10^{-4} V/m en $t = 0$ y $z = 1/8$ m.

(a) Escribir la expresión instantánea de $\vec{E}$ para cualquier t y z.

(b) Escribir la expresión instantánea de $\vec{H}$.

(c) Determinar las posiciones donde E_x tiene un máximo positivo cuando $t = 10^{-8}$ s.

Sol.: (a) $\vec{E}(z,t) = 10^{-4}\cos\left[2\pi 10^{8} t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right]\cdot \hat{u}_x$ (V/m)

(b) $\vec{H}(z,t) = \frac{10^{-4}}{60\pi}\cos\left[2\pi 10^{8} t - \frac{4\pi}{3}\left(z - \frac{1}{8}\right)\right]\cdot \hat{u}_y$ (A/m)

(c) $z_m = \frac{13}{8} \pm n\lambda$ (m)

P2.- La intensidad de campo eléctrico de una onda plana uniforme polarizada linealmente que se propaga en el agua de mar en la dirección $+z$ es $\vec{E} = 100\cos(10^7 \pi \cdot t)\cdot \hat{u}_x$ (V/m) en $z = 0$. Los parámetros constitutivos del agua de mar son $\varepsilon_r = 72$, $\mu_r = 1$ y $\sigma = 4$ (S/m).

(a) Determinar la constante de atenuación, la constante de fase, la impedancia intrínseca, la velocidad de fase, la longitud de onda y la profundidad de penetración.

(b) Calcular la distancia a la cual la amplitud de $\vec{E}$ es el 1% de su valor en $z = 0$.

(c) Escribir las expresiones de $\vec{E}(z,t)$ y $\vec{H}(z,t)$ en $z = 0.8$ (m) como funciones de t.

Sol.: **(a)** $\alpha = 8.89$ N/m $\quad \beta = 8.89$ rad/m $\quad \eta_c = \pi \cdot e^{j\pi/4}$ Ω

$v_p = 3.53\times10^6$ m/s $\quad \lambda = 0.707$ m $\quad \delta = 0.112$ m

(b) $z_1 = 0.518$ m

(c) $\vec{E}(0.8,t) = 0.082\cos(10^7\pi\cdot t - 47.5^{\circ})\cdot\hat{u}_x$

$\vec{H}(0.8,t) = 0.026\cos(10^7\pi\cdot t - 92.3^{\circ})\cdot\hat{u}_y$

P3.- Una onda plana uniforme con $\tilde{E} = E_i\hat{u}_y$, cuya frecuencia es de 100 MHz, se propaga en el aire en dirección $+x$ e incide normalmente sobre un plano perfectamente conductor en $x = 0$. Suponiendo $E_i = 6$ mV/m, escribir las expresiones fasoriales e instantáneas de:

(a) $\mathbf{E_i}$ y $\mathbf{H_i}$ de la onda incidente.

(b) $\mathbf{E_r}$ y $\mathbf{H_r}$ de la onda reflejada.

(c) $\mathbf{E_t}$ y $\mathbf{H_t}$ de la onda total en el arie.

Sol.: **(a)** $\tilde{E}_i(x) = 6\times10^{-3}e^{-j2\pi x/3}\hat{u}_y$ (V/m) $\qquad \tilde{H}_i(x) = \dfrac{10^{-4}}{2\pi}e^{-j2\pi x/3}\hat{u}_z$ (A/m)

$$\vec{E}_i(x,t) = 6\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right)\cdot\hat{u}_y \quad \text{(V/m)}$$

$$\vec{H}_i(x,t) = \frac{10^{-4}}{2\pi}\cos\left(2\pi\times10^8 t - \frac{2\pi}{3}x\right)\cdot\hat{u}_z \quad \text{(A/m)}$$

(b) $\tilde{E}_r(x) = -6\times10^{-3}e^{j2\pi x/3}\hat{u}_y$ (V/m) $\qquad \tilde{H}_r(x) = \dfrac{10^{-4}}{2\pi}e^{j2\pi x/3}\hat{u}_z$ (A/m)

$$\vec{E}_r(x,t) = -6\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^8 t + \frac{2\pi}{3}x\right)\cdot\hat{u}_y \quad \text{(V/m)}$$

$$\vec{H}_r(x,t) = \frac{10^{-4}}{2\pi}\cos\left(2\pi\times10^8 t + \frac{2\pi}{3}x\right)\cdot\hat{u}_z \quad \text{(A/m)}$$

(c) $\tilde{E}_t(x) = -j \cdot 12\times10^{-3}\, sen\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\hat{u}_y$ (V/m)

$$\tilde{H}_t(x) = \frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\hat{u}_z \quad \text{(A/m)}$$

$$\vec{E}_t(x,t) = 12\times10^{-3}\, sen\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\cdot sen\left(2\pi\times10^{8}t\right)\cdot\hat{u}_y \quad \text{(V/m)}$$

$$\vec{H}_t(x,t) = \frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{3}x\right)\cos\left(2\pi\times10^{8}t\right)\cdot\hat{u}_z \quad \text{(A/m)}$$

P4.- Se puede usar una varilla dieléctrica o fibra de material transparente para guiar la luz o una onda electromagnética en condiciones de reflexión interna total. Determinar la mínima constante dieléctrica del medio que sirve de guía para que una onda que incida con cualquier ángulo sobre un extremo quede confinada dentro de la varilla hasta que salga por el extremo opuesto.

Sol.: $n = \sqrt{2}$

P5.- La expresión instantánea del campo eléctrico de una onda plana uniforme en el aire es:

$$\vec{E}_i(x,z;t) = 10\cos(wt + 3x - 4z)\cdot\hat{u}_y \quad \text{(V/m)}$$

La onda incide sobre un frontera plana perfectamente conductora en $z = 0$.

(a) Calcular la constante de fase β_1, la frecuencia angular ω y el ángulo de incidencia θ_i.

(b) Determinar $\tilde{E}_r(x,z)$.

(c) Analizar el comportamiento de $\vec{E}_1(x,z;t)$.

Sol.: **(a)** $\beta_1 = 5$ rad/m $\quad \theta_i = 36.9^{\circ} \quad \omega = 1.5\times10^{9}$ rad/seg

(b) $\tilde{E}_r(x,z) = 10e^{j3x+j4z}(-\hat{u}_y)$

(c) $\vec{E}_1(x,z;t) = 20\cdot sen(4z)\cos\left(1.5\times10^{9}t + 3x - \pi/2\right)\cdot\hat{u}_y$

P6.- Una onda electromagnética plana, monocromática y linealmente polarizada (se supone conocida w y la amplitud E) se propaga en sentido $+z$ en el vacío e incide de forma perpendicular sobre un plano conductor. Determinar:

(a) Campo eléctrico y magnético encima del plano (componentes espacial y temporal), distribución de carga y corriente inducida en el plano.

(b) Valor temporal de la densidad de energía electromagnética.

(c) Verificar el Teorema de Poyting para un cilindro de base s y altura $\lambda/4$, apoyado en el plano conductor.

Sol.: (a) $\tilde{E}_{est} = -2jE \cdot sen(kz) \cdot \hat{u}_x$ (V/m) $\quad \tilde{H}_{est} = 2\dfrac{E}{\eta_0}\cos(kz)\cdot\hat{u}_y$ (A/m)

$\vec{E}(z,t) = 2E \cdot sen(kz) \cdot sen(\omega t) \cdot \hat{u}_x$ (V/m) $\quad \vec{H}(z,t) = 2\dfrac{E}{\eta_0}\cdot\cos(kz)\cdot\cos(\omega t)\cdot\hat{u}_y$ (A/m)

$\sigma_s = 0 \qquad \vec{J}_x = 2\dfrac{E}{\eta_0}\hat{u}_x$

(b) $U_{em} = 2\varepsilon_0 E^2\left[sen^2(kz)sen^2(\omega t) + \cos^2(kz)\cos^2(\omega t)\right]$

P7.- Una onda TEM se propaga en el espacio libre y su fasor campo magnético es:

$$\tilde{H}_i(z) = \frac{10}{120\pi}e^{-j(-6x+8z)}\hat{u}_y$$

Obtener:

(a) Dirección de propagación, frecuencia y longitud de onda.

(b) Polarización.

(c) Expresión temporal del campo electromagnético.

La onda incide en z=0 sobre un plano conductor perfecto (plano XY). Calcular:

(a) Campos reflejados.

(b) Campos totales en $z \leq 0$.

(c) Vector de Poynting en $z \leq 0$.

(d) Valores de z correspondientes a máximos de H.

P8.- Hallar el tipo de polarización de las ondas:

(a) $\vec{E}(z,t) = 3sen(\omega t - \beta z) + 6sen(\omega t - \beta z + 75^{\circ})$ (V/m)

(b) $\tilde{E}(x,y) = \left[(2-j)\hat{u}_x - (2-j)\hat{u}_y\right] e^{-j\frac{x+y}{\sqrt{2}}}$ (V/m)

Sol.: **(a)** Elíptica

(b) Lineal

P9.- Hallar para la siguiente onda:

$$\tilde{E}(y,z) = (1+j)(\hat{u}_y + \hat{u}_z)e^{-j\cdot 20\pi(y-z)}$$

(a) Tipo de polarización.

(b) Dirección de propagación.

(c) Frecuencia.

(d) Potencia transmitida.

Sol.: **(a)** $\frac{\hat{u}_y - \hat{u}_z}{\sqrt{2}}$

(b) 3GHz

(c) Lineal

(d) $W_T = \frac{\sqrt{2}}{60\pi}$ W

P10.- El campo eléctrico de una onda EM plana y monocromática en el vacío es:

$E_x = 0$

$E_y(x,t) = 0.4\cos\left[3\pi \times 10^7 \left(t - x/c\right)\right]$

$E_z(x,t) = 0.4sen\left[3\pi \times 10^7 \left(t - x/c\right)\right]$

Determinar:

(a) λ

(b) Tipo de polarización

(c) Dirección de propagación

(d) Campo magnético de la onda

Sol.: **(a)** $\lambda = 20m$

(b) Circular levógira

(c) $+x$

(d) $B_z = \frac{E_y}{c}$ $\qquad B_y = -\frac{E_z}{c}$ $\qquad |B| = 1.33\times 10^{-9}$ T

P11.- Dada la onda EM cuyo campo eléctrico es:

$$E_x = 0$$

$$E_y(x,t) = E_0 sen(\omega t - kx)$$

$$E_z(x,t) = E_0 sen\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{6}\right)$$

Hallar:

(a) Estado de polarización.

(b) $\vec{B}$

Sol.: **(a)** Elíptica dextrógira (ángulo del semieje mayor con el eje y 45º)

(b) $\vec{B} = \left(0, -\frac{E_z}{c}, \frac{E_y}{c}\right)$

P12.- Hallar la expresión de una onda plana de frecuencia 3GHz con polarización circular positiva, amplitud máxima 1 V/m y que se propaga en la dirección -z en el vacío.

Sol.: $\vec{E}(z) = (\hat{u}_x + j\hat{u}_y)e^{j\varphi}e^{j20\pi \cdot z}$

P13.- La amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática que se propaga en el vacío está dada por:

$$\tilde{E}(z) = \left[\left(\sqrt{3} + j\right)\hat{u}_x + 2j \cdot \hat{u}_y\right] e^{-j20\pi z/3} \quad \text{(V/m)}$$

Determinar:

(a) La dirección de propagación.

(b) La frecuencia.

(c) El tipo de polarización.

(d) La relación axial.

(e) El ángulo α que el eje mayor de la elipse descrita por el campo eléctrico forma con el eje X.

(f) El campo magnético.

(g) La potencia transmitida.

Sol.: **(a)** +z

(b) $f = 1GHz$

(c) Elíptica negativa.

(d) $R.A. = \sqrt{3}$

(e) $\alpha = 45^{o}$

(f) $\tilde{H}(z) = \dfrac{1}{120\pi}\left[-2j\hat{u}_x + \left(\sqrt{3} + j\right)\hat{u}_y\right] e^{-j20\pi z/3}$ (A/m)

(g) $W_T = \dfrac{1}{30\pi}$ mW

P14.- Determinar la amplitud compleja del campo eléctrico de una onda plana homogénea monocromática con polarización elíptica negativa sabiendo que:

1. Se propaga en el vacío según una dirección que se considera como eje Z.
2. La relación entre el valor máximo y el valor mínimo del campo eléctrico es N .
3. La dirección según la cual se mide el máximo valor del campo eléctrico se toma como eje Y.
4. El valor medio de la densidad de potencia que transmite la onda es P W/m^2.
5. El campo eléctrico en el plano Z=0 tiene dirección $\hat{u}_x$ en el instante $t = 0$.

Sol.: $\tilde{E}(z) = \sqrt{\dfrac{2\eta_0 P}{N^2+1}}\left(\hat{u}_x + jN\cdot\hat{u}_y\right)\cdot e^{-j2\pi f z/c}$ V/m